数理解析研究所講究録
561巻 1985年 91-114

3-Bridge Projection の Wirtinger表示における語の代入について

学習院大 理学部 沖田一雄 (Kazuo Okita)

3-bridge projection により与えられた link L に対し、対応する Wirtinger 表示を手掛かりにして, L の link type や補空間の基本群を決定する, あるいは特徴付ける問題について考える。

3-bridge projection を直接扱うことによる link type の判定問題については、本講究録中の根上氏の「3-Bridge Link Type の判定(I)」(以下これを [N] として引用する。) および河野氏の「同(II)」において考察されている。これらの報告においては, 与えられた 3-bridge 分解 $(L, S^2(L))$ ([N] §1 参照) から得られるすべての 3-bridge projection のうち wave ([N] §1 参照) を持たないもの全体の集合 $Q_w(L, S^2(L))$ ([N] では $Q_w(L)$ と書かれている) を構成するアルゴリズムが述べられている。([N] §3)

これに対し我々は, Wirtinger 表示を簡略化するアルゴリ

ズムとして"語の代入"(定義は§1で述べる)なるものを考える。3-bridge 分解 $(L, S^2(L))$ に対し，群の表示の集合 $\mathcal{S}(L, S^2(L))$ であって次の性質を持つものを構成するアルゴリズムを与えることが，本報告の目的である：任意に与えられた 3-bridge projection の Wirtinger表示 P に対し，もしも P が $(L, S^2(L))$ から得られる 3-bridge projection に対応する表示なら，Pに対し可能なすべての代入を行なった後得られる代入不可能な表示のうち少なくとも1つは $\mathcal{S}(L, S^2(L))$ に含まれる。

このアルゴリズムを実際に実行することにより，例えばLとして trivial knot をとるとき，

$$\mathcal{S}(L, S^2(L)) = \{ \langle a, b, c ; ab^{-1}, bc^{-1}, ca^{-1} \rangle \}$$

が得られる。このことと，trivial knot の n-bridge 分解が一意的であること（Otal [O]）および Dehn の補題（例えば [M]）により，3-bridge projection 全体からの trivial knot の判定が，語の代入により可能なことが結論できる。

また，link L が splittable（すなわち，Lが入っている3次元球面内の2次元球面であって，Lを2つの成分に分解するものが存在する）であるとき，$\mathcal{S}(L, S^2(L))$ に含まれる任意の表示において，その関係子のうち少なくとも1つは空語であることが分かる。このことと，splittable link の

n-bridge 分解の一意性（根上－沖田[NO]）により，3-bridge projection からの splittability の判定が可能となる。

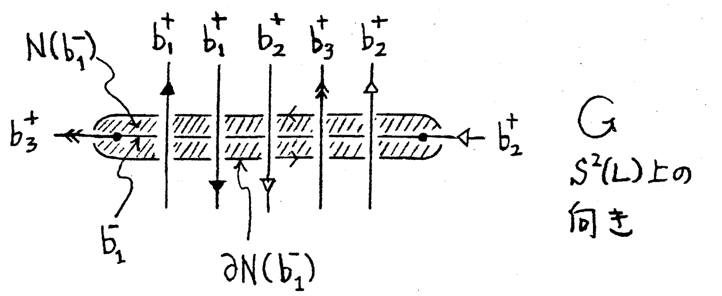
本稿における結果は，金戸氏の[K]における3次元球面の種数2の Heegaard 図式に対応する群表示に対する語の代入の理論を，一般の多様体の種数2の Heegaard 図式の場合に拡張した私の結果[O_1]の Wirtinger 表示への応用として得られるものである。なお，議論の詳細については，現在準備中の[O_2]において述べる予定です。

§1. 語の代入

本稿では，3-bridge 分解および 3-bridge projection のみを扱うので，これらを単に，分解および projection と呼ぶことが多い。また，projection といったらそれは normal（[N] §1 参照）であるとし，projection の変形を行なうときには，その変形の後つねに normalization（[N] §1 参照）が行なわれているものとする。

projection $p(L) = \bigcup_{i=1}^{3} (b_i^+ \cup b_i^-)$ を link L の分解 $(L, S^2(L))$ から得られたものとする。ここに，b_i^+ および b_i^- $(i=1,2,3)$ は，それぞれ $p(L)$ の over bridge および under bridge である（[N] §1 参照）。球面 $S^2(L)$ 上に1つの向きを固定し，b_1^+, b_2^+ および b_3^+ にも適当に向きを与える。また b_1^-, b_2^- およ

び b_3^- の $S^2(L)$ における十分小さな閉近傍 $N(b_i^-)$ をとり，その境界である輪 $\partial N(b_i^-)$ にも適当に向きを与える $(i=1,2,3)$。このとき，各点 $p \in b_1^+ \cap \partial N(b_i^-)$ に対し（もちろんこのような点が存在するときの話であるが），点 p において向き付けられた弧の組 $(b_1^+, \partial N(b_i^-))$ が与える $S^2(L)$ 上の向きが，あらかじめ固定されていた $S^2(L)$ 上の向きと同じ場合に，点 p に a という値を対応させ，逆向きの場合に a^{-1} という値を対応させる。同様に，$b_2^+ \cap \partial N(b_i^-)$ の各点には，b あるいは b^{-1} を，$b_3^+ \cap \partial N(b_i^-)$ の各点には，c あるいは c^{-1} を対応させることにする $(i=1,2,3)$。ここで，与えられた向きに沿って $\partial N(b_1^-)$ を一周しながら $(b_1^+ \cup b_2^+ \cup b_3^+) \cap \partial N(b_1^-)$ の各点に与えられた値を並べて出来る，文字 a, a^{-1}, b, b^{-1}, c および c^{-1} からなる語を b_1^- に対応する語といい，$R(a,b,c)$ と書く（図 1 参照）。同様に，b_2^- に対応する語を $S(a,b,c)$，b_3^- に対応する語を $T(a,b,c)$ と書くことにする。



$$R(a,b,c) = c a^{-1} a b c^{-1} b^{-1} b^{-1} b c b^{-1} a^{-1} a$$

図 1

このようにして得られる群の表示

$$\langle a, b, c \,;\, R(a,b,c), S(a,b,c), T(a,b,c) \rangle$$

を，over bridgeを生成元に対応させ under bridgeを関係子に対応させた $p(L)$ の Wirtinger表示といい，$\pi^{+}(p(L))$ と書く。同様に，under bridgeを生成元に対応させ over bridgeを関係子に対応させたWirtinger表示も作れるが，これを $\pi^{-}(p(L))$ と書く。$\pi^{+}(p(L))$，$\pi^{-}(p(L))$ はともに，Lが入っている3次元球面を S^3 とするとき，S^3-L の基本群を与えている。

projection $p(L)$ に対し，$\pi^{\varepsilon}(p(L))$ $(\varepsilon=+,-)$ の関係子は (1) 対応するbridgeを回る輪への向きの与え方および (2) 関係子を読みとる際の輪の出発点の位置の与え方により，$\pi^{\varepsilon}(p(L))$ の群としての構造は変えない，いく通りもの語として表現できる。これらの語たちをすべて同値な語と呼ぶことにし，その同値関係を $\equiv$ で表わすことにする。例えば，

$$\begin{aligned} R(a,b,c) &= ca^{-1}abc^{-1}b^{-1}b^{-1}bcb^{-1}a^{-1}a \\ &\overset{(1)}{\equiv} a^{-1}abc^{-1}b^{-1}bbcb^{-1}a^{-1}ac^{-1} \quad \text{（上の逆元）} \\ &\overset{(2)}{\equiv} bc^{-1}b^{-1}bbcb^{-1}a^{-1}ac^{-1}a^{-1}a \quad \text{（上の左から3番目から読む）} \\ &\overset{(1)}{\equiv} a^{-1}aca^{-1}abc^{-1}b^{-1}b^{-1}bcb^{-1} \\ &\quad \text{-----------------------} \end{aligned}$$

という具合である。$\equiv$ の上の数字は，$\equiv$ が上で述べた(1)，(2)

のどちらに対応して生じたかを表わしている。

さらに，$\pi^{\varepsilon}(p(L))$ $(\varepsilon=+,-)$ は，上記 (1)，(2) の他に，(3) $S^2(L)$ 上の向きの与え方，(4) over および under bridge の順番の決め方 および (5) 生成元に対応する bridge への向きの与え方により，群の構造を変えずに，様々な表示として得られる。これらの表示もやはり互いに<u>同値</u>であるといい，その同値関係を $\equiv$ で表わすことにする。例えば，

$$\langle a,b,c\,;\ ab^{-1},\ cabb^{-1}b^{-1}a^{-1},\ bc^{-1}ac\rangle$$
$$\overset{(1)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ ab^{-1},\ abbb^{-1}a^{-1}c^{-1},\ bc^{-1}ac\rangle$$
$$\overset{(2)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ ab^{-1},\ abbb^{-1}a^{-1}c^{-1},\ acbc^{-1}\rangle$$
$$\overset{(3)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ a^{-1}b,\ a^{-1}b^{-1}b^{-1}bac,\ a^{-1}c^{-1}b^{-1}c\rangle$$
$$\overset{(4)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ b^{-1}a,\ b^{-1}a^{-1}a^{-1}abc,\ b^{-1}c^{-1}a^{-1}c\rangle \quad (a\text{ と }b\text{ の交換})$$
$$\overset{(4)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ b^{-1}a^{-1}a^{-1}abc,\ b^{-1}a,\ b^{-1}c^{-1}a^{-1}c\rangle \quad (\text{語の交換})$$
$$\overset{(5)}{\equiv}\langle a,b,c\,;\ ba^{-1}a^{-1}ab^{-1}c,\ ba,\ bc^{-1}a^{-1}c\rangle \quad (b\text{ と }b^{-1}\text{ の交換})$$

という具合である。すなわち，$p(L)$ が与えられると，これから得られる Wirtinger 表示の同値類は高々2つあり，1つは $\pi^{+}(p(L))$ を含み，もう1つは $\pi^{-}(p(L))$ を含むことになる。

projection $p(L)$ の Wirtinger 表示 $\pi^{\varepsilon}(p(L))$ $(\varepsilon=+,-)$ において，向き付けられた bridge b_i^{ε} が生成元である文字 x に対応しているとき，（向き付けられた）b_i^{ε} に<u>ラベル x が与えられ</u>

たと言うことがよくある。語Xを $\pi^{\varepsilon}(p(L))$ の1つの関係子とし，$b_j^{-\varepsilon}$（$\varepsilon=\pm$ のとき $-\varepsilon=\mp$（複号同順）と規約する。以後断わりなくこの記法を用いる。）が対応するbridgeであるとする。また，$b_j^{-\varepsilon}$ の両端点から出る向き付けられた2本のbridgeにはラベル x と y が与えられ，これらのbridgeが最初に $b_j^{-\varepsilon}$ と交わる点には値 x^{μ} と y^{ν}（$\mu,\nu=1,-1$）が与えられているとする。このとき，ある語Yが存在して，

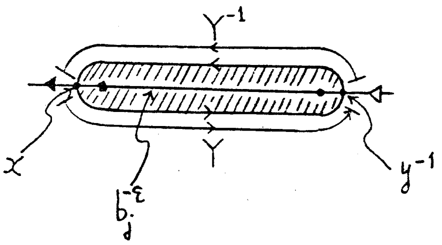


図 2

$$(*)\quad X \equiv x^{\mu}\,Y\,y^{\nu}\,Y^{-1}$$

となる（図2参照）。このような語の性質をWirtinger性と呼び，(*)の右辺の形の語をXのWirtinger形と呼ぶことにする。

語Xが，語X′および文字 x, x^{-1} により

$$X \equiv X'xx^{-1} \quad \text{または} \quad \equiv X'x^{-1}x$$

を満たしているとき，X′はXの巡回既約化により得られるという。語Xに対し巡回既約化を可能な限り行なって得られる語を，Xの巡回既約形といい $\widetilde{X}$ と書く。$X=\widetilde{X}$ である語Xを巡回既約語という。さらに，表示Pにおいてそのすべての関係子を巡回既約形に変えて得られる表示を，Pの巡回既約形といい $\widetilde{P}$ と書く。$P=\widetilde{P}$ のときPを巡回既約表示という。

以上の準備の下で，Wirtinger表示における代入を定義する。

<u>定義</u>　$p(L)$をlink Lの3-bridge projectionとし，

$P=\Pi^{\varepsilon}(p(L))=\langle a,b,c\,;\,R(a,b,c),\,S(a,b,c),\,T(a,b,c)\rangle$ $(\varepsilon=+,-)$,

$R=R(a,b,c)$,　$S=S(a,b,c)$,　$T=T(a,b,c)$

とおく。巡回既約語 $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$, $\widetilde{T}$ のうちの1つ，これを$\widetilde{T}$とする，が他の語，これを$\widetilde{R}$とする，に巡回既約語の意味で部分語として含まれているとする：すなわち，語X, Yが存在して

$$X\equiv\widetilde{R},\quad Y\equiv\widetilde{T}\ \text{かつ}\ Y\ \text{は}\ X\ \text{の部分語}$$

となっているとする。ここで，XのWirtinger形を$xZyZ^{-1}$とする。このとき，以下の3通りの状況に応じて語XをX'へ変形する操作を<u>代入</u>と呼び，$X\searrow X'$と書く。さらに，

$$P'=\langle a,b,c\,;\,X',\,\widetilde{S},\,\widetilde{T}\rangle$$

とするとき，$\widetilde{P}$のP'への変形も<u>代入</u>と呼び，$\widetilde{P}\searrow P'$と書く。$X\equiv\widetilde{R}$，$Y\equiv\widetilde{T}$以外の場合についても同様に定義する。

(S1) Yがxもyも含まない場合。すなちYはZまたはZ^{-1}の部分語であるが，いまYはZの部分語とする（図3.1参照）。このとき，語A, Bにより

$$\begin{cases} X\equiv xAYByB^{-1}Y^{-1}A^{-1} \\ Z\equiv AYB \end{cases}$$

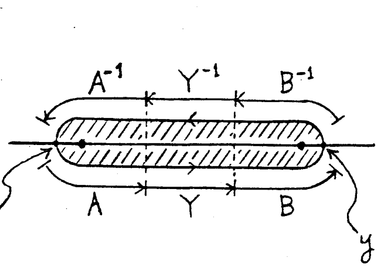


図3.1

と表わせる。この記号の下で，$X'=\widetilde{xAByB^{-1}A^{-1}}$ と定義する。

(S2) Yが x, y のうちちょうど一方を含む場合。いま y が Yに含まれているとする(図3.2参照)。このとき，語 A, B, Y' により

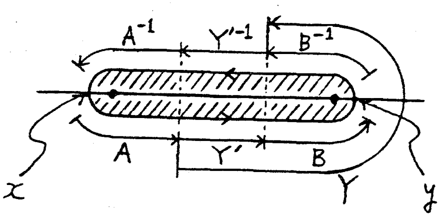


図3.2

$$\begin{cases} X \equiv xAY'ByB^{-1}Y'^{-1}A^{-1} \\ Y \equiv Y'ByB^{-1} \\ Z \equiv AY'B \end{cases}$$

と表わせる。この記号の下で，$X' = \widehat{xAByB^{-1}A^{-1}}$ と定義する。

(S3) Yが x, y 両方を含む場合。このとき語 A, B, Y' により

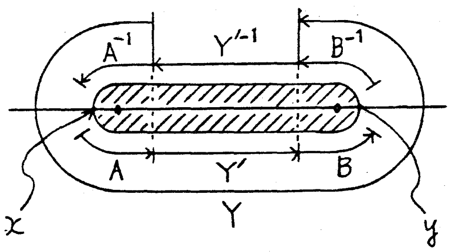


図3.3

$$\begin{cases} X \equiv xAY'ByB^{-1}Y'^{-1}A^{-1} \\ Y \equiv A^{-1}xAY'ByB^{-1} \\ Z \equiv AY'B \end{cases}$$

と表わせる。この記号の下で
$X' = \widehat{xAByB^{-1}A^{-1}}$ と定義する。　　　(定義終り)

ここで，代入に関していくつか注意を述べる。まず，代入は巡回既約表示における変形であることに注意する。また，代入は表示の群としての構造を変えないことおよび各関係子のWirtinger性を保つことが，定義から容易に分かる。語Xに対し，Xを作っている文字列の長さをXの長さと呼び，表示Pにおいて，Pのすべての関係子の長さの総和をPの長さ

と呼び，$|P|$ と書くことにする。このとき，代入は表示の巡回既約形の長さを減少させる。すなわち，巡回既約表示 P, P' に対し，

$$P \searrow P' \Longrightarrow |P| > |P'|$$

である。

§2. Co-nested triple

語 X が 2 文字からなる部分語 xx^{-1} または $x^{-1}x$ を含まないとき，X を既約語という。

定義 文字 $a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}$ からなる3つの語の組 (X_1, X_2, X_3) であって，次の操作 (N1), (N2) により帰納的に構成されるものを，co-nested triple と呼び，その全体を $\mathcal{N}(a,b,c)$ と書く。

(N1) $(a,b,c) \in \mathcal{N}(a,b,c)$

(N2) $(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{N}(a,b,c)$ かつ次を満たす (X_1', X_2', X_3') が存在するとき $(X_1', X_2', X_3') \in \mathcal{N}(a,b,c)$：

$i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ なる i, j が存在して

$$X_k' = \begin{cases} X_k & (k \neq j) \\ X_i X_j X_i^{-1} \text{ または } X_i^{-1} X_j X_i & (k = j) \end{cases}$$

かつ，X_j' は既約語である。　　　　　　　　　　（定義終り）

例えば，$\mathcal{N}_1(a,b,c)$ $(\subset \mathcal{N}(a,b,c))$ を，(a,b,c) に対し操作

(N2) を1回行なって出来るもの全体とすると,

$$\mathcal{H}_1(a,b,c) = \left\{ \begin{array}{l} (a,b,aca^{-1}),\ (a,b,a^{-1}ca),\ (a,aba^{-1},c),\ (a,a^{-1}ba,c) \\ (a,b,bcb^{-1}),\ (a,b,b^{-1}cb),\ (bab^{-1},b,c),\ (b^{-1}ab,b,c) \\ (a,cbc^{-1},c),\ (a,c^{-1}bc,c),\ (cac^{-1},b,c),\ (c^{-1}ac,b,c) \end{array} \right\}$$

となる。$\mathcal{H}_1(a,b,c)$ は後に §5 で用いられる。

文字 $a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}$ からなる4つの語 $W(a,b,c)$, $A = A(a,b,c)$, $B = B(a,b,c)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a,b,c)$ に対し, $W(a,b,c)$ における各文字 x および x^{-1} を各々語 X および X^{-1} ($x \in \{a,b,c\}$, $X \in \{A,B,\mathcal{C}\}$) で置き換えることにより得られる語を $W(A,B,C)$ と書くことにする。例えば,

$$W(a,b,c) = aba^{-1}c^{-1},\quad A = a,\quad B = cbc^{-1},\ \mathcal{C} = bcb^{-1}$$

なら

$$W(A,B,C) = ABA^{-1}C^{-1} = acbc^{-1}a^{-1}bc^{-1}b^{-1}$$

である。さらに, 表示

$$P = \langle a,b,c\,;\ R(a,b,c),\ S(a,b,c),\ T(a,b,c)\rangle$$

および語 A, B, C に対し,

$$P(A,B,C) = \langle a,b,c\,;\ R(A,B,\mathcal{C}),\ S(A,B,C),\ T(A,B,C)\rangle$$

と書くことにする。この書き方によれば, co-nested triple $v \in \mathcal{H}(a,b,c)$ に対しては,

$$P(v) = \langle a,b,c\,;\ R(v),\ S(v),\ T(v)\rangle$$

となる。

§3. Fake 3-bridge projection

この節では，本稿の結果を得るために最も重要な役割を果たす，fake 3-bridge projection について述べる。これは，金戸[K]による fake Heegaard 図式の概念が基礎になっている。一般に，3-bridge projection $p(L)$ に対し，表示 $\pi^{\pm}(p(L))$ は巡回既約表示とは限らない。そこで $\widetilde{\pi^{\pm}(p(L))}$ に対応する幾何学的対象として考え出されたのが，fake 3-bridge projection である。

定義　$p(L)=\bigcup_{i=1}^{3}(b_i^{+}\cup b_i^{-})$ を link L の projection とし，$\pi^{\varepsilon}(p(L))$ $(\varepsilon=+,-)$ を対応する Wirtinger 表示とする。また $\nu\in\mathcal{N}(a,b,c)$ とする。このとき，$f^{\varepsilon}(p(L),\nu)$ が，associated projection $p(L)$ および co-nested triple ν を持つ，fake 3-bridge projection（以後簡単に fake projection と呼ぶ）であるとは，次の(F1)〜(F4)が成り立つときをいう。以下では，$\varepsilon=+$ の場合についてのみ述べるが，$\varepsilon=-$ の場合も，$+$ を $-$ に，over を under に変えることにより同様に定義できる。

(F1)　$f^{+}(p(L),\nu)$ は，$\pi^{+}(p(L))$ を得る際に $p(L)$ に付加された条件（b_i^{+} の向き等）を含む $S^2(L)$ 上の図である。特に，各 b_i^{-} の回りには向き付けられた輪が描かれている $(i=1,2,3)$。

(F2)　各 b_i^{+} の回りには，0本以上の向き付けられた平行な輪があり，各輪には a, b, c のうちいずれかのラベルが与えられ

ている（$i=1,2,3$）。

（F3）（F1），（F2）により，$\pi^+(p(L))$ を作ったときと同様に，群の表示が得られるが，それを $\pi(f^+(p(L),v))$ と書くことにする。このとき，

$$\pi(f^+(p(L),v)) \equiv \pi^+(p(L))(v)$$

である。

（F4） $p(L)$ に over jump move（[N] §1 参照）を有限回行なうことにより得られる projection $p'(L)$ であって

$$\widetilde{\pi(f^+(p(L),v))} \equiv \widetilde{\pi^+(p'(L))}$$

となるものが存在する。（定義終り）

projection のときと同様に，fake projection としては，cancelling region（[N] §1 参照）を持たないもの，すなわち normal なものだけを扱う。また，変形後に normalization が伴うことも projection の場合と同様である。

fake projection に対し，"Type I surgery" および "Type II surgery" と呼ばれる2通りの変形を定義する。$f^\varepsilon(p(L),v)$（$\varepsilon=+,-$）を変形することにより，$f^\varepsilon(p'(L),v')$ が得られたとする。記号の複雑化を避けるため，ここでも $\varepsilon=+$ のときについてのみ述べる。$p(L)$ の2つの over bridge，これを b_1^+ および b_2^+ とする，および under bridge，これを b_1^- とする，であって，図4.1 または 図4.2 の左図の状況になっているもの

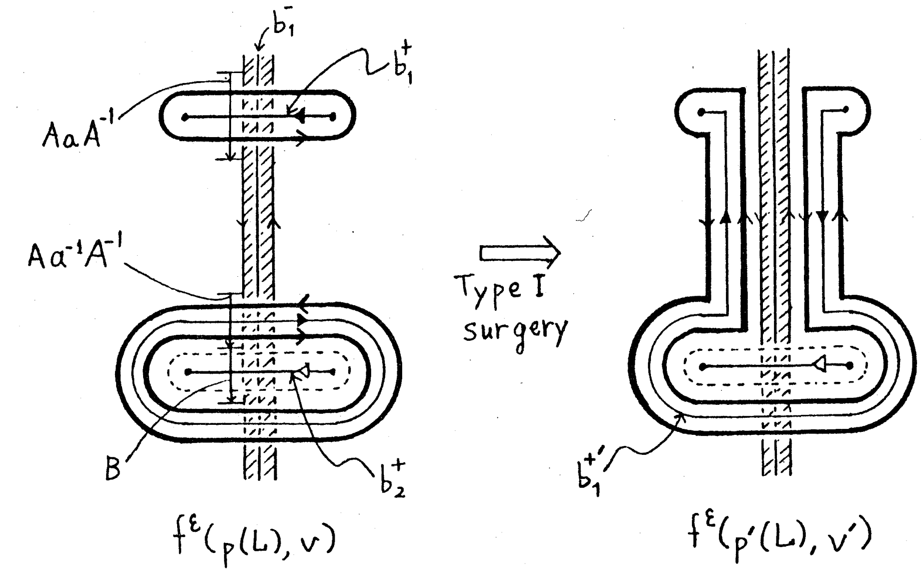


図 4.1

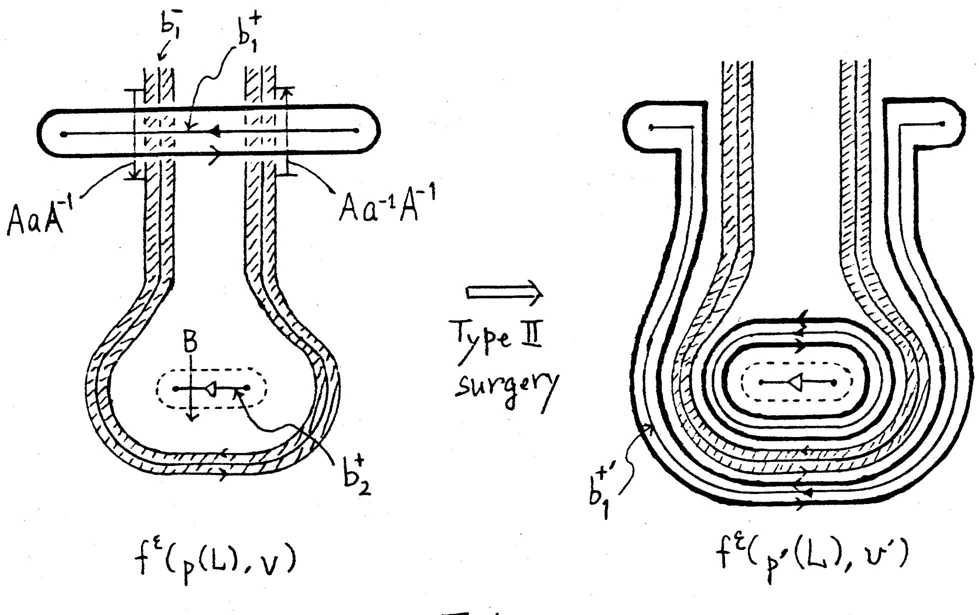


図 4.2

が存在したとする。ただし，b_1^- の図中に描かれている部分を，図中には描かれてない over bridge b_3^+ は通過しないものとする。図中の矢印のついた太線は，この線を右側から左側へ，

1度通過したとき，語 A が対応する，向き付けられた輪の集りを表わしている。また，b_1^- の図中の部分に対応する語において，AaA^{-1} と $Aa^{-1}A^{-1}$ 以外に 既約化可能な語は存在しないものとする。以上の状況の下で，各図において左図を右図へ変形することを，各々 Type I および Type II surgery という。ここで，$p'(L)$ は，$p(L)$ から b_1^+ を $b_1^{+\prime}$ へ変える jump move（[N] §1 参照）により得られる projection である。また，Type I surgery の場合は $v=(AaA^{-1}, Aa^{-1}A^{-1}BAaA^{-1}, C)$ とするとき，$v'=(AaA^{-1}, B, C)$ となり，Type II surgery においては，$v=(AaA^{-1}, B, C)$ とするとき，$v'=(AaA^{-1}, AaA^{-1}BAa^{-1}A^{-1}, C)$ となる。

projection $p(L)$ が与えられたとき，$p(L)$ が連結で $\pi^{\varepsilon}(p(L))$ が巡回既約形でないなら，Type II surgery を行ない fake projection を作る。この fake projection に対し，Type I surgery が行なえるなら行ない，Type I surgery が行なえなくかつ Type II surgery が行なえるなら Type II surgery を行なう，ということを可能な限り続けることにする。ただし，非連結な fake projection が出てきたら，そこでやめることにする。こうして $p(L)$ から構成された fake projection を，$f^{\varepsilon}(p'(L), v)$ とすると，これは次の命題を成立させる fake projection となる。

<u>命題1.</u> $p(L)$ を 3-bridge 分解 $(L, S^2(L))$ から得られる projection とする。このとき, co-nested triple v を持ち, 次の性質 $\mathcal{F}(p(L))_1$ または $\mathcal{F}(p(L))_2$ を満たす fake projection $f^{\varepsilon}(p'(L), v)$ が存在する $(\varepsilon = +, -)$:

$\mathcal{F}(p(L))_1$: $p'(L)$ は $(L, S^2(L))$ から得られる連結な projection であり, $\pi(f^{\varepsilon}(p'(L), v)) \equiv \widetilde{\pi^{\varepsilon}(p(L))}$ となる。

$\mathcal{F}(p(L))_2$: $p'(L)$ は $(L, S^2(L))$ から得られる非連結な projection であり, $\widetilde{\pi(f^{\varepsilon}(p'(L), v))} \equiv \widetilde{\pi^{\varepsilon}(p(L))}$ となる。

§4. Wave と代入

命題1. における性質 $\mathcal{F}(p(L))_1$ を持つ fake projection の associated projection に wave ([N] §1 参照) が存在する場合について考察する。

<u>補題</u> $p(L)$ を link L の 3-bridge projection とし, $f^{\varepsilon}(p'(L), v)$ を性質 $\mathcal{F}(p(L))_1$ を持つ fake projection とする。$p'(L)$ に wave が存在するならば, 特に, $\pi(f^{\varepsilon}(p'(L), v))$ の関係子に対応する bridge を結ぶ wave が存在する。

<u>証明</u> 生成元に対応する $p'(L)$ の bridge を結ぶ wave が存在するとき, 関係子に対応する bridge を結ぶ wave も存在することを示す。$f^{\varepsilon}(p'(L), v)$ が性質 $\mathcal{F}(p(L))_1$ を持つことから, $p'(L)$ と wave との関係は図5のようになる。ここで, 輪

で囲まれた線分は，生成元に対応するbridgeを表わしている。

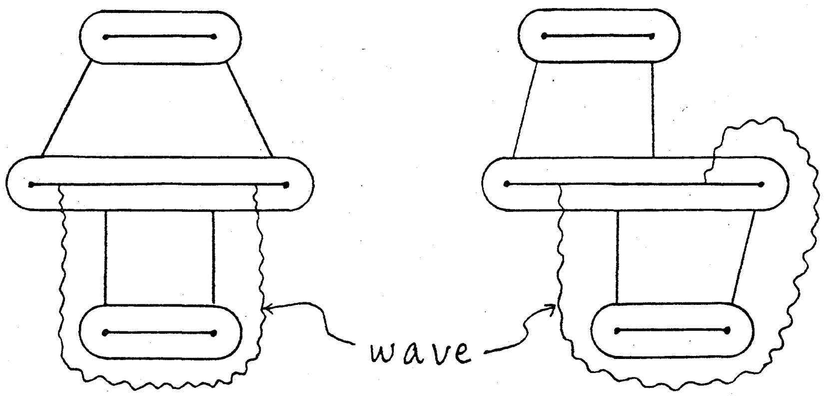


図5

図より，$p'(L)$のすべてのbridgeにより分割される$S^2(L)$上の領域のうちの1つ（図5では有界でない部分）の境界には，関係子に対応するbridgeの部分弧が4本存在することが分かる。従ってこれらのうちの少なくとも2本は，同じbridgeに属している。すなわち，このbridgeを結ぶwaveが存在する。

（証明終り）

この補題に注意することにより次の命題が得られる。

命題2. $p(L)$をlink Lの3-bridge projectionとし，$f^{\varepsilon}(p'(L),v)$を性質$\mathcal{H}(p(L))_1$を持つfake projectionとする。$p'(L)$にwaveが存在するとき，次を満たすfake projection $f^{\varepsilon}(p''(L),v)$が存在する（$\varepsilon=+,-$）：

(1)　$p''(L)$は，$p(L)$から有限回のjump moveにより得られる。

(2) $\pi(f^{\varepsilon}(p'(L),v))\ (\equiv \widetilde{\pi^{\varepsilon}(p(L))}) \searrow \widetilde{\pi(f^{\varepsilon}(p''(L),v))}$.

<u>略証明</u>　補題より，wave は関係子に対応する bridge を結んでいるとしてよい。このとき，図6における変形を行なえばよい。$p'(L)$ において，図における $b_i^{-\varepsilon}$ を $b_i^{-\varepsilon'}$ に換えたものが，$p''(L)$ である。

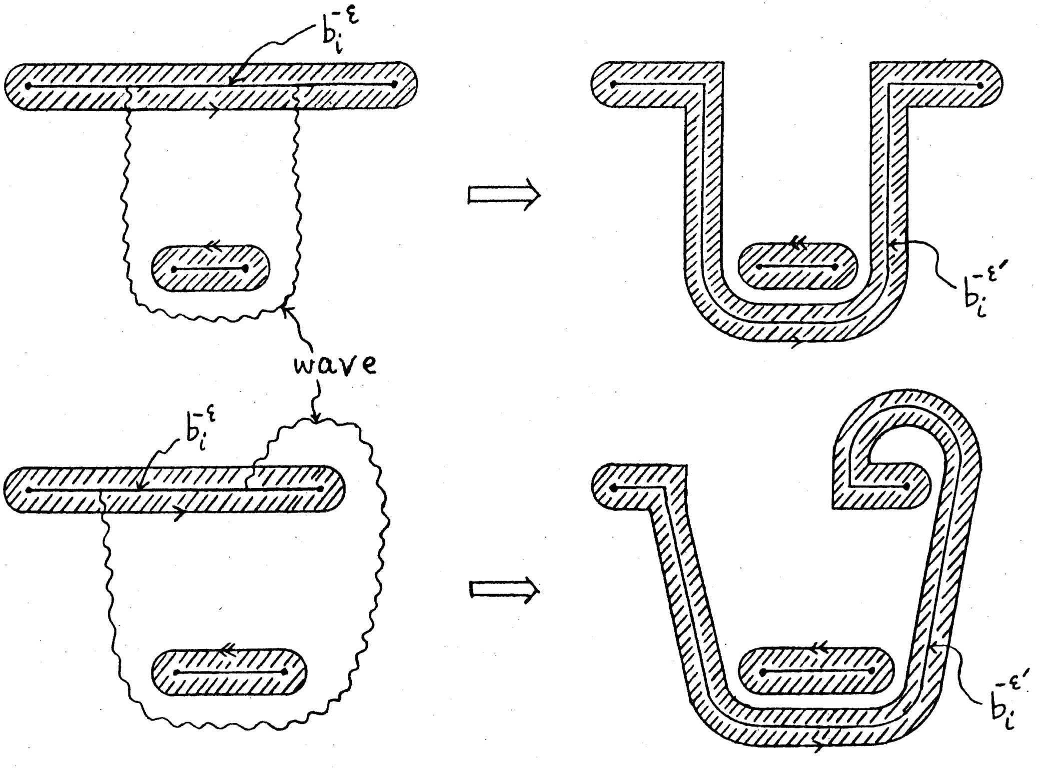


図6

（略証明終り）

§5. $\mathcal{S}(L, S^2(L))$ の構成アルゴリズム

分解 $(L, S^2(L))$ から得られる wave を持たない projection 全体の集合を $Q_w(L, S^2(L))$ と書くことにする。

表示Pに対し行なえる代入の仕方は一通りとは限らない。表示Pに対し，行なえるすべての代入を可能な限り続けることにより得られる代入不可能な表示全体の集合を，$\tilde{\mathcal{S}}(P)$ と書くことにする。また，$p(L)\in Q_w(L,S^2(L))$ に対し，

$$\{\Pi^+(p(L))(v),\ \Pi^-(p(L))(v)\ ;\ v\in\mathcal{H}(a,b,c)\}$$

に含まれる巡回既約表示全体からなる集合を $\mathcal{H}(p(L))$ と書く。このとき，

$$\mathcal{S}(L,S^2(L))=\bigcup\{\tilde{\mathcal{S}}(P)\ ;\ P\in\mathcal{H}(p(L)) \text{ for some } p(L)\in Q_w(L,S^2(L))\}$$

と定義する。

$\mathcal{H}(a,b,c)$ は帰納的に定義されること，および $Q_w(L,S^2(L))$ を構成するアルゴリズムが存在すること（[N] §3参照）から，$\mathcal{S}(L,S^2(L))$ はアルゴリズミカルに構成できることが分かる。すなわち次が成り立つ。

<u>命題3.</u>　$\mathcal{S}(L,S^2(L))$ を構成するアルゴリズムが存在する。

ここで，主定理を述べる前に，splittable link に関して述べることにする。splittable link L に対し，その分解 $(L,S^2(L))$ からは，Schubert の標準形（[N] §1参照）と呼ばれる 2-bridge projection，これを $p_s(L,S^2(L))$ と書くことにする，と自明な 1-bridge projection との和として表わされる projection が得られる。この $p_s(L,S^2(L))$ から得られる表示における，2つの関係子を $R^{\varepsilon}(p_s(L,S^2(L)))$, $S^{\varepsilon}(p_s(L,S^2(L)))$ と

書くことにする ($\varepsilon=+,-$)：

$$\pi^{\varepsilon}(p_s(L,S^2(L)))=\langle a,b;\ R^{\varepsilon}(p_s(L,S^2(L))),\ S^{\varepsilon}(p_s(L,S^2(L)))\rangle。$$

splittable link の projection から fake projection を構成する時には，非連結なものが出てくることがあるが，この場合を別に考察することにより，次の定理が得られる

<u>定理 1.</u> $(L,S^2(L))$ を splittable link L の 3-bridge 分解とし，$p(L)$ を $(L,S^2(L))$ から得られる任意の projection とする。このとき，

$$\{\widetilde{\mathcal{S}}(\pi^{\varepsilon}(p(L)));\ \varepsilon=+,-\}=$$

$$\{\langle a,b,c;\ R^{\delta}(p_s(L,S^2(L)))(v),\ S^{\delta}(p_s(L,S^2(L)))(v),\ \phi\rangle;\ v\in\mathcal{H}(a,b,c),\ \delta=+,-\}$$

となる。ここに，ϕ は空語を表わす。

命題1,2を繰返し適用することより

定理 1. が成立することから，一般の link に対し次の定理が成立する。この定理が，本報告の主定理である。

<u>定理 2.</u> $(L,S^2(L))$ を link L の 3-bridge 分解とし，$p(L)$ を $(L,S^2(L))$ から得られる任意の projection とする。このとき次が成立する：

$$\widetilde{\mathcal{S}}(\pi^{\varepsilon}(p(L)))\cap\mathcal{S}(L,S^2(L))\neq\phi\ ,\quad \varepsilon=+,-。$$

定理 2 の意味は，$p(L)$ から得られる Wirtinger 表示 P に対し，行なえるすべてのタイプの代入を行なった後得られた，代入不可能な表示のうち，少なくとも 1 つは $\mathcal{S}(L,S^2(L))$ に含まれるということである。

次に，実際にコンピューターによって計算することを考え

て，$\mathcal{S}(L, S^2(L))$ を求めるアルゴリズムの一例を与えることにする。$\mathcal{H}_1(a,b,c)$ を §2において与えたものとする。ここでは，$p(L) \in \mathcal{Q}_w(L, S^2(L))$ から

$$\{\hat{\mathcal{S}}(P) \,;\, P \in \mathcal{H}(p(L))\}$$

を求めるアルゴリズムを述べるが，簡単のため

$$\{\hat{\mathcal{S}}(P) \,;\, P \in \mathcal{H}(p(L))\} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$$

として，$\mathcal{S}^+$ の構成方法を述べる。$P = \Pi^+(p(L))$ とおく。

<u>Step 0.</u>

$$\mathcal{A}_0 = \{P\},\ \mathcal{B}_0 = \{P\},\ \mathcal{C}_0^\circ = \{P\},\ \mathcal{D}_0 = \phi$$

とおく。

< $i = 1$ >

<u>step i.</u>

$$\mathcal{A}_i = \{P(v) \,;\, v \in \mathcal{H}_1(a,b,c)\}$$

$$\mathcal{B}_i = \{P(v) \in \mathcal{A}_i \,;\, P(v)\text{は巡回既約表示}\}$$

$$\mathcal{C}_i^\circ = \{P(v) \in \mathcal{B}_i \,;\, P(v)\text{は代入不可能}\}$$

$$\mathcal{C}_i^\triangle = \{P(v) \in \mathcal{B}_i \,;\, P(v)\text{は代入可能}\}$$

$$\mathcal{C}_i^\times = \bigcup \{\hat{\mathcal{S}}(P(v)) \,;\, P(v) \in \mathcal{C}_i^\triangle\}$$

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i^\times - \left(\bigcup_{j=0}^{i} \mathcal{C}_j^\circ\right)$$

とおく。このとき

1. $\mathcal{B}_i = \phi$ のときは，$\mathcal{S}^+ = \bigcup_{j=0}^{i-1} (\mathcal{C}_j^\circ \cup \mathcal{D}_j)$ として，この操作を終了する。

2. $\mathcal{B}_i \neq \phi$ かつ $\mathcal{C}_i^{\Delta} = \phi$ のときは，$A_i = \mathcal{B}_i$ とおく。

3. $\mathcal{B}_i \neq \phi$ かつ $\mathcal{C}_i^{\Delta} \neq \phi$ のときは

(3.1) $\mathcal{D}_i = \phi$ のとき，$A_i = \mathcal{C}_i^{\circ}$ とおく。

(3.2) $\mathcal{D}_i \neq \phi$ のとき，$A_i = \mathcal{C}_i^{\circ} \cup \mathcal{D}_i$ とおく。

以上，2.または3.が起きたときは，$\langle i = i+1 \rangle$ として，Step. $i+1$ を行なう。

§6. 例

本稿におけることを調べ始めたころには，定理2.を成立させる $\mathcal{S}(L, S^2(L))$ としては，

$$\cup\{\mathcal{H}(p(L))\,;\ p(L) \in Q_w(L, S^2(L))\}$$

を考えればよいのではないかと予想していた。しかし，次に上げる例により，本稿におけるように $\mathcal{S}(L, S^2(L))$ を与えなければ，一般に定理2.が成立しないことが分かる。

L を Hopf link とするとき $Q_w(L)$ は，図7.に示すようにただ1つの projection からなる（[N] §2参照）。この projection を $p(L)$ とするとき，

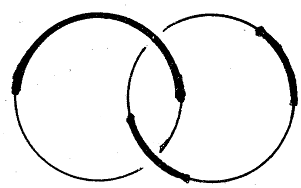


図7

$\pi^+(p(L))$

$\cong \pi^-(p(L))$

$\cong \langle a, b, c\,;\ ab^{-1}a^{-1}b,\ ba^{-1}c^{-1}a,\ cb^{-1}\rangle$

となる。

ここで，$P = \Pi^{\pm}(p(L))$ とおくことにする。このとき，

$$
\begin{aligned}
&P(a,\ cbc^{-1},\ a^{-1}ca) \\
&= \langle a,b,c;\ acb^{-1}c^{-1}a^{-1}cbc^{-1},\ cbc^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1}aa,\ a^{-1}cacb^{-1}c^{-1}\rangle \\
&\equiv \langle a,b,c;\ \underline{acb^{-1}c^{-1}a^{-1}c}bc^{-1},\ cbc^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1}aa,\ \underline{acb^{-1}c^{-1}a^{-1}c}\rangle \\
&\searrow \langle a,b,c;\ ac^{-1}a^{-1}c,\ cbc^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1}aa,\ acb^{-1}c^{-1}a^{-1}c\rangle \\
&\equiv \langle a,b,c;\ \underline{c^{-1}a^{-1}ca},\ cbc^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1}aa,\ cb^{-1}\underline{c^{-1}a^{-1}ca}\rangle \\
&\searrow \langle a,b,c;\ c^{-1}a^{-1}ca,\ bc^{-1}a^{-1}a^{-1}c^{-1}aa,\ b^{-1}a^{-1}ca\rangle
\end{aligned}
$$

となるが，最後の行の表示は，co-nested triple v によって $P(v)$ という形では表わせない。すなわち $\mathcal{H}(p(L))$ に含まれないのである。

最後になりましたが，上記の例を得るにあたって，計算の一部を，学習院大学数学科3年の大塚文代君にお手伝い頂きました。ここに，感謝致します。

参考文献

[K] T. Kaneto, On genus 2 Heegaard Diagrams for the 3-sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), 583-597.

[M] E. Moise, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Graduate Texts in Mathematics 47, Springer-Verlag.

[N] S. Negami, 3-Bridge Link Type の判定 (I), 本講究録.

[O_1] K. Okita, The Substitution of Words in Group Presentations associated with Genus 2 Heegaard Diagrams, in preparation.

[O_2] K. Okita, The Substitution of Words in Wirtinger Presentations associated with 3-Bridge Projections, in preparation.

[O] J.P. Otal, Présentations en ponts du nœud trivial, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. 294 (1982), 553–556.